PRZEKSZTAŁCENIA W PRZESTRZENI 3D

Część 3.: Składanie przekształceń. Kinematyka prosta i odwrotna

Witam w kolejnej części cyklu poświęconego przekształceniom w przestrzeni 3D. Do tej pory omówiliśmy translacje, skalowanie, obroty oraz rodzaje układów współrzędnych, nadszedł więc czas, aby wszystko razem złożyć w całość.

Wiadomo, że w przypadku przemieszczania obiektów w przestrzeni nieraz korzystamy z kilku operacji przekształcających, np. obrót -> translacja, translacja -> obrót itp. W zawiązku z tym trzeba wykonać kilka działań na macierzach, jednak należy pamiętać o naszej zasadzie numer trzy. Dla tych, którzy nie czytali poprzedniego artykułu, przypominam ją tutaj:

Zasada trzecia

Przy wykonywaniu złożonych transformacji (np. jednoczesnym obracaniu i przesuwaniu obiektu) najpierw wykonujemy przesunięcie, a dopiero potem obrót.

Zasada ta jest istotna ze względu na transformacje układu współrzędnych obiektu podczas obrotu obiektu, kiedy to obraca się z nim lokalny układ współrzędnych. W związku z tym przesunięcie obiektu po jego obróceniu będzie się odbywać już w przekształconym układzie współrzędnych, a co za tym idzie, obiekt wyląduje nie tam, gdzie byśmy chcieli.

Złożoność przekształceń przestrzennych opiera się na tych działaniach, które były omówione w poprzednich artykułach, czyli na mnożeniu macierzy. W celu zademonstrowania samej istoty przekształcenia złożonego posłużymy się przykładami z poprzednich odcinków. Aby dokonać translacji obiektu, wystarczyło pomnożyć aktualne współrzędne obiektu w postaci macierzy jednokolumnowej przez macierz przekształcenia. To samo dotyczyło przypadku obracania obiektu. Mnożyliśmy bieżące współrzędne obiektu przez macierz obrotu. Dla przypomnienia poniżej przedstawię obie macierze:.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz translacji obiektu w przestrzeni 3D. T_x, T_y, T_z – współrzędne przesunięcia obiektu

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz obrotu wokół osi Z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz obrotu wokół osi X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz obrotu wokół osi Y

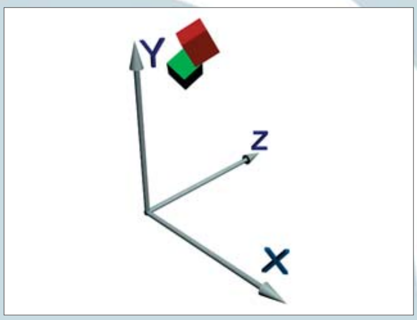
Zatem aby dokonać przekształcenia złożonego, należy wykonać mnożenie współrzędnych bieżących przez odpowiednie macierze. Dla przykładu spójrzmy na ogólny wzór dla translacji z obrotem wokół osi X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reprezentacja macierzowa przekształcenia złożonego

Mnożenie macierzy omówione było w pierwszej części przy okazji translacji, więc nie będę do tego wracał, aby nie tracić czasu.

A teraz zobaczmy, dlaczego w trakcie przekształceń złożonych należy zachować odpowiednią kolejność ich wykonywania. Na poniższej ilustracji przedstawione są dwa sześciany, dla których wykonaliśmy to samo przekształcenie, ale w innej kolejności. Pierwszy z sześcianów (zielony) najpierw był przesuwany, a następnie obracany, zaś drugi (czerwony) wpierw obracaliśmy, a następnie przesuwaliśmy. Jak widać, położenie sześcianów po wykonaniu obu operacji nie jest takie samo, pomimo tego, że przesunięte były o ten sam wektor x=y=z=50 i obrócone o ten sam kąt 45° wokół każdej z osi.



1. Różnice w wyniku różnej kolejności przekształceń

Na tym kończy się nasza przygoda z obrotami, translacjami oraz skalowaniami prostych obiektów w przestrzeni 3D. Zajmiemy się teraz przekształceniami opartymi na kinematyce prostej oraz kinematyce odwrotnej, tak często używanymi do animacji obiektów. W przypadku kinematyki prostej obiekt potomny dziedziczy transformację obiektu nadrzędnego, do którego jest przyłączony, natomiast ruch obiektu potomnego nie ma żadnego wpływu na obiekt nadrzędny. W kinematyce odwrotnej występuje efekt uzależnienia obiektu nadrzędnego od potomnego, co oznacza, że zmiana położenia obiektu potomnego wpłynie na zamianę położenia obiektu nadrzędnego. Połączenie obiektów tworzy łańcuch kinematyczny o skończonej ilości ogniw. Łańcuchy możemy podzielić na dwa rodzaje:

– łańcuchy kinetyczne płaskie,
– łańcuchy kinetyczne przestrzenne.

Oczywiście nas bardziej interesować będzie łańcuch kinematyczny przestrzenny. Podstawową własnością łańcucha jest jego ruchliwość. Określa ona, ile łańcuch posiada stopni swobody, czyli ile różnych typów ruchu jest w stanie przenieść. Można wydzielić trzy stopnie ruchliwości łańcucha **w**:

w=0 – łańcuch sztywny, **w=1** – łańcuch normalny, **w>1** – łańcuch swobodny.

Stopień ruchliwości oblicza się ze wzoru strukturalnego. Dla łańcucha przestrzennego wzór ma postać :

$$\mathbf{w} = 6(\mathbf{n} - 1) - 5\mathbf{p}_5 - 4\mathbf{p}_4 - 3\mathbf{p}_3 - 2\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

gdzie: **n** – ilość ogniw;
$\mathbf{p}_n$ – ilość par kinetycznych n-tej klasy.

Para kinetyczna oznacza połączenie dwóch członów mechanizmu odbierające część stopni swobody członom przez nie związanym. Stopnie swobody jest to ilość prostych ruchów, jakie ciało może zrealizować w układzie kartezjańskim (w naszym przypadku w przestrzeni 3D). Ciało swobodne ma maksymalnie sześć stopni swobody:

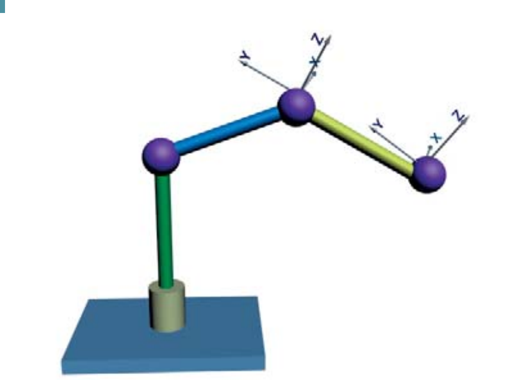
trzy ruchy translacyjne w stosunku do osi układu współrzędnych **X**, **Y** i **Z**;
trzy obroty względem osi równoległych do osi układu współrzędnych **X**, **Y** i **Z**.

Należy pamiętać, że ciało materialne łączone z drugim w parę kinetyczną traci pewną ilość stopni swobody, w zależności od klasy pary kinematycznej.

W programach do grafiki 3D, np. w 3D Studio, po utworzeniu kinematyki odwrotnej istnieje możliwość blokowania stopni swobody dla poszczególnych osi oraz określania przekazywania ruchu z rodzica na potomka.

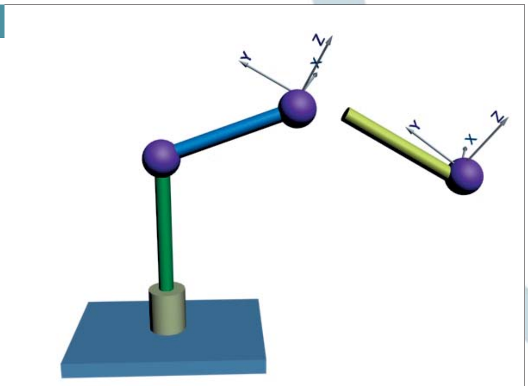
Obrazowo kinematykę prostą i odwrotną można zademonstrować na przykładzie ramienia robota.

2.



Hierarchia obiektów z kinematyką prostą. Poruszenie potomka nie wpływa na położenie rodzica

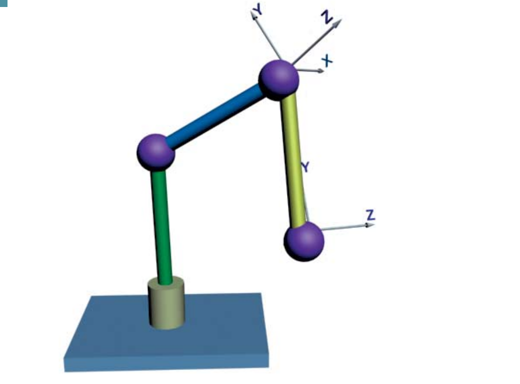
3.



Hierarchia obiektów z kinematyką prostą. Translacja obiektu potomnego nie spowodowała zmian w obiekcie rodzica

Teraz użyjemy kinematyki odwrotnej i zobaczymy, że zmiana położenia obiektu potomka wpływa na zmianę obiektu rodzica.

4.



Hierarchia obiektów z kinematyką odwrotną. Translacja obiektu potomnego spowodowała przesunięcie obiektu rodzica.

Kinematyka odwrotna jest dobrym narzędziem do animacji postaci. Oferuje nam kilka algorytmów, z których każdy posiada inne charakterystyki działania. I algorytmy, i wspomniane ich charakterystyki działania postaramy się przybliżyć w kolejnych artykule.

Życzymy wszystkim udanych łańcuchów kinematycznych.

Radosław „Ramirez" Bednarski
R.Bednarski@ics.p.lodz.pl

Adam Wojciechowski
adamwoj@ics.p.lodz.pl

Literatura:

1. „3ds max5. Projekty i Rozwiązania" Aaron Roos, Michele Bousquet.
2. „Introduction to Computer Graphics" J.D Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R.L. Philips Addison – Wesley Publishing Company, Inc. 1994.
3. „OpenGL. Księga Eksperta" Richard S. Wright jr, Michael Sweet.